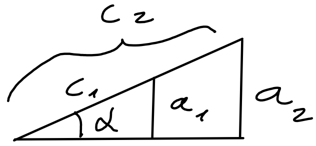
Una prima definizione delle funzioni goniometriche

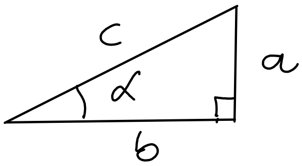
Se consideriamo triangoli rettangoli simili, il rapporto tra lati corrispondenti è lo stesso e dipende solo dagli angoli:



$$a_1 : c_1 = a_2 : c_2$$

Si definiscono allora le seguenti funzioni degli angoli:

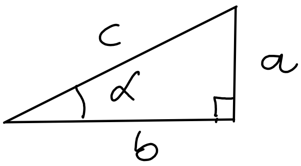
1)



$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\left(\text{seno dell'angolo} = \frac{\text{cateto opposto all'angolo}}{\text{ipotenusa}}\right)$$

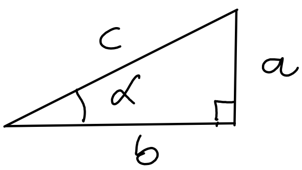
2)



$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\left(\text{coseno dell'angolo} = \frac{\text{cateto adiacente all'angolo}}{\text{ipotenusa}}\right)$$

3)



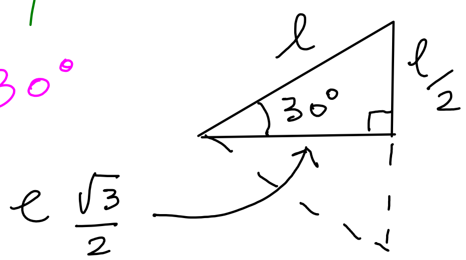
$$\tan\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\left(\text{tangente dell'angolo} = \frac{\text{cateto opposto all'angolo}}{\text{cateto adiacente all'angolo}}\right)$$

Questi rapporti prendono il nome di funzioni goniometriche perché dipendono solo dall'ampiezza dell'angolo.

Esempi

$\alpha = 30°$



In questo caso si tratta di metà triangolo equilatero.

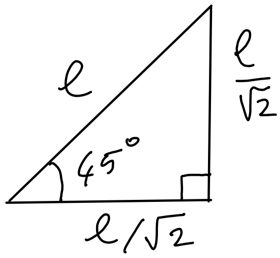
Le funzioni goniometriche valgono:

$$\sin 30° = \frac{\ell/2}{\ell} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$\cos 30° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\ell}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0{,}866$$

$$\tan 30° = \frac{\ell/2}{\frac{\sqrt{3}}{2}\ell} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 0{,}577$$

$\alpha = 45°$



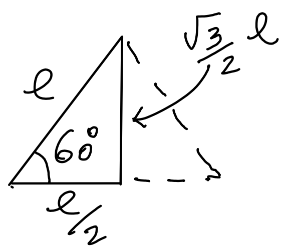
Il triangolo è metà di un quadrato tagliato lungo la diagonale.

$$\sin 45° = \frac{\ell/\sqrt{2}}{\ell} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0{,}707$$

$$\cos 45° = \frac{\ell/\sqrt{2}}{\ell} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0{,}707$$

$$\tan 45° = \frac{\ell/\sqrt{2}}{\ell/\sqrt{2}} = 1$$

$\alpha = 60°$



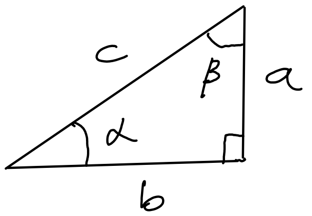
Anche in questo caso si ha mezzo triangolo equilatero.

$$\sin 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\ell}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0{,}866$$

$$\cos 60° = \frac{\ell/2}{\ell} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$\tan 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\ell}{\ell/2} = \sqrt{3} \simeq 1,73$$

- Dalla definizione si capisce che le funzioni goniometriche seno e coseno così definite devono avere valori compresi sempre tra 0 e 1.
- La tangente assume invece valori crescenti al tendere dell'angolo a 90°.
- Si vede anche, sempre dalla definizione, che il seno di un angolo è uguale al coseno del suo complementare:



$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\beta = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad \sin\beta = \frac{b}{c}$$

Per la tangente si ha:

$$\tan\alpha = \frac{a}{b}, \quad \tan\beta = \frac{b}{a}, \quad \text{da cui } \tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta}$$

Si può scrivere anche:

$$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$$

$$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{\tan(90° - \alpha)}$$

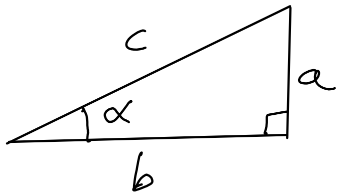
dove $\beta = 90° - \alpha$ è il complementare di α.

– Si definiscono poi le funzioni reciproche:

$$\frac{1}{\sin\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha, \quad \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha, \quad \frac{1}{\tan\alpha} = \operatorname{cotan}\alpha$$

cosecante secante cotangente

Due relazioni fondamentali tra le funzioni goniometriche



1ª relazione

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

La somma del seno al quadrato e del coseno al quadrato di uno stesso angolo è uguale a 1.

Infatti $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, quindi

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

($a^2+b^2=c^2$ per il teorema di Pitagora).

2ª relazione

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

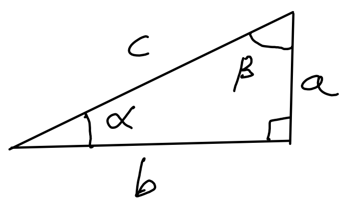
La tangente di un angolo è uguale al rapporto tra seno e coseno dello stesso angolo.

Infatti $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, quindi

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \tan\alpha .$$

Esercizi

Calcola i valori delle funzioni goniometriche degli angoli acuti dei seguenti triangoli



1) $a = 6$, $b = 4$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} ,$$

$$\tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{b}{a} = \frac{2}{3}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{3}{\sqrt{13}} , \quad \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

2) $a = 8$, $c = 10$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{100-64} = \sqrt{36} = 6$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4/5}{3/5} = \frac{4}{3}$$

3) In un triangolo rettangolo l'ipotenusa misura 25 cm e $\beta = 50°$. Calcola la lunghezza dei cateti.

$c = 25$ cm , $\beta = 50°$, quindi

$\sin\beta = \frac{b}{c}$ da cui

$$b = c\sin\beta = 25 \cdot \sin 50° \simeq 25 \cdot 0{,}766 \simeq 19{,}1$$

$$\cos\beta = \frac{a}{c}$$

$$a = c\cos\beta = 25 \cdot \cos 50° \simeq 25 \cdot 0{,}643 \simeq 16{,}1$$